11-й класс

1. Можно ли найти натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_{2012}$, среди которых нет двух одинаковых, так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_{2012}}=1?$$

Ответ: можно.

Решение.

Например, можно поступить следующим образом:

$$\begin{aligned}1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2^{2010}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2009}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2^{2009}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{3\cdot 2^{2009}}+\frac{1}{6\cdot 2^{2009}}.\end{aligned}$$

2. Существует ли четырёхугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

Ответ. Да, разумеется.

Решение.

Для определённости в качестве основания пирамиды возьмём трапецию с неравными основаниями и две плоскости, перпендикулярные плоскости этой трапеции и проходящие через её боковые стороны. На прямой пересечения этих плоскостей берём произвольную точку вне плоскости трапеции. Эта точка и будет пятой вершиной пирамиды с требуемым свойством.

3. Какое из двух чисел больше: $2011^{2010\cdot 2012}$ или 2010^{2011^2}?

Ответ: первое.

Решение.

В самом деле,

$$2011^{2010\cdot 2012} \,?\, 2010^{2011^2} \leftrightarrow 2011^{2011^2-1} \,?\, 2010^{2011^2} \leftrightarrow \left(\frac{2011}{2010}\right)^{2011^2} \,?\, 2011$$

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2010}\right)^{2011^2} \,?\, 2011.$$

В левой части последнего неравенства стоит произведение 2011^2 пар скобок, при раскрытии которых 2011^2 раз встретится дробь $\frac{1}{2010}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{2010}\right)^{2011^2} > 1 + 2011^2 \cdot \frac{1}{2010} > 2011.$$

4. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла на гипотенузу опустили высоту, которая поделила исходный треугольник на два меньших прямоугольных треугольника. Доказать, что:

из радиусов трёх окружностей, вписанных в эти прямоугольные треугольники, как из отрезков можно составить новый треугольник;

новый треугольник будет прямоугольным;

новый треугольник будет подобным исходному.

Решение.

Все утверждения немедленно следуют из следующей легко проверяемой леммы: если c — гипотенуза прямоугольного треугольника с острыми углами α и β, а r — радиус вписанной в него окружности, то $c = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$. Множитель $\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$ как раз и будет коэффициентом подобия между новым и исходным треугольниками.

5. Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

Решение.

Полагая $\alpha = \operatorname{arctg} x, \beta = \operatorname{arctg} y, \gamma = \operatorname{arctg} z$, получаем, что α, β, γ принадлежат интервалу $\left(0,\ {}^{\pi}/_{2}\right)$, и $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Надо доказать, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$.

Последнее неравенство после умножения на произведение косинусов α, β, γ преобразуется к виду

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta > \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

или

$$\cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) > \sin\gamma(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta),$$

то есть

$$\cos\gamma\sin(\alpha+\beta) > -\sin\gamma\cos(\alpha+\beta),$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) > 0,$$

что верно, поскольку

$$\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) > \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(\pi-\gamma) = 0$$

(котангенс убывает на интервале $(0,\ \pi)$).

6. 2013 цифр выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 2013-значное число (в широком смысле — несколько первых цифр могут быть и нулями) делится на 27. Доказать, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

Решение.

Заметив, что $1000 = 999 + 1 = 9 \cdot 111 + 1 = 9 \cdot 3 \cdot 37 + 1 = 27 \cdot 37 + 1$ даёт при делении на 27 остаток 1, делаем вывод, что натуральное число $n = \overline{\ldots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ делится на 27 в том и только в том случае, если число $f(n) = \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \cdots$ делится на 27. Покрасим все цифры по кругу в три цвета: красный, жёлтый, зелёный, красный, жёлтый, зелёный,…, красный, жёлтый, зелёный (2013 делится на 3). Сумму красных цифр обозначим a, сумму жёлтых — b, а сумму зелёных — c. Допустим, что

первое прочтение, в результате которого получилось делящееся на 27 число n, начиналось с красной цифры. Тогда число $f(n) = 100a + 10b + c$ также делится на 27. Если начать читать с жёлтой цифры, то для нового числа m получим $f(m) = a + 100b + 10c$. Разность $f(n) - f(m) = 99a - 90b - 9c = 18a + 18b + 18c + 81a - 108b - 27c = 2 \cdot 9(a + b + c) + 27(3a - 4b - c)$ делится на 27, поскольку $a + b + c$ делится на 3. Тогда $f(m)$ делится на 27, и m делится на 27. В случае зелёной цифры $f(m) = 10a + b + 100c$, и $f(n) - f(m) = 90a + 9b - 99c = -18a - 18b - 18c + 108a + 27b - 81c = -18(a + b + c) + 27(4a + b - 3c)$ опять делится на 27 с тем же результатом.